Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in Matematica
di

Roberto Feola

Tori Risonanti e sistemi unidimensionali con forzante quasi-periodico

Relatore

Prof. Guido Gentile

Candidato | Relatore

ANNO ACCADEMICO 2010-2011
MAGGIO 17, 2012

1 Introduzione

Nello studio dei sistemi Hamiltoniani con n gradi di libertà, la difficoltà di risolvere esplicitamente le equazioni differenziali porta naturalmente a domandarsi se è possibile trovare un sistema di coordinate "più semplice" in cui studiare al dinamica. Una possibilità è di vedere se è possibile trovare coordinate (φ, I) tali che le variabili $I_1, \dots, I_n$ sono costanti del moto e ogni φ_i torna al suo valore iniziale dopo una variazione $\Delta\varphi_i = 2\pi$ in un intorno di un punto di equilibrio stabile. Queste coordinate sono chiamate coordinate "azione-angolo" e in queste variabili l'Hamiltoniana assume la forma $H(\varphi, I) = K(I)$ (si veda ad esempio [2]). Sfortunatamente in generale non è possibile trovare tali coordinate, a meno che non si facciano alcune ipotesi sul sistema, come mostrato dal teorema di Arnol'd-Liouville.

Se si possono trovare coordinate azione-angolo, diciamo che il sistema è *integrabile* e in tal caso si possono risolvere banalmente le equazioni del moto. In generale, i problemi fisici non appartengono alla classe dei sistemi Hamiltoniani integrabili ma una vasta classe di essi può essere considerata come i cosiddetti sistemi *quasi-integrabili*, i.e. piccole perturbazioni di sistemi integrabili. Purtroppo non è possibile risolvere direttamente le equazioni del moto, ma in alcuni casi è possibile fare uno studio qualitativo del sistema. L'idea può essere spiegata come segue. Si consideri un sistema integrabile descritto in coordinate azione-angolo da un Hamiltoniana analitica $H(\varphi, I) = K(I)$. Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \partial_I K, \\ \dot{I} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. La soluzione con dato iniziale (φ_0, I_0) è $I = I_0$, $\varphi = \varphi_0 + \partial_I K(I_0)t$ come si vede immediatamente. In particolare lo spazio delle fasi è foliato in una famiglia di tori invarianti parametrizzati da I_0. Il moto lungo uno di questi tori è lineare con vettore di frequenze $\omega_0 := \partial_I K(I_0)$. Se si considera invece un Hamiltoniana $K(I) + \varepsilon V(\varphi, I)$, è possibile che ci siano dei moti quasi-periodici che si sviluppano su tori e che foliano tutto lo spazio delle fasi almeno per ε piccolo? Sfortunatamente in [20] Poincaré fornì una risposta negativa a tale domanda: dimostrò che in generale non è possibile trovare coordinate in cui il sistema diventa integrabile. Nonostante questo, Kolmogorov in [16] dimostrò la conservazione di un "grande" insieme di moti quasi-periodici per perturbazioni sufficientemente piccole e sotto le ipotesi di analiticità dell'Hamiltoniana e una condizione di non degenerazione[1] sull'Hamiltoniana libera (ovvero per

[1] per ogni I_0 si ha $|\det \partial_I K(I)| > 0$, nota come condizione di non degenerazione di Kolmogorov

$\varepsilon = 0$). Più precisamente dimostrò che sotto le ipotesi di cui sopra i tori con frequenza Diofantea[2] sopravvivono alla perturbazione. Più tardi Arnol'd [1] diede una dimostrazione alternativa dello stesso risultato e contemporaneamente Moser [18] ottenne il risultato richiedendo soltanto che l'Hamiltoniana fosse "abbastanza" differenziabile. Questi tre importanti lavori diedero luogo alla cosiddetta teoria KAM (Kolmogorov, Arnol'd, Moser).

Un problema interessante è di analizzare sistemi in cui il vettore di frequenze soddisfi qualche condizione di risonanza, ovvero i tori di dimensione bassa. il problema dei tori di dimensione bassa si considera tipicamente per perturbazioni di sistemi che consistono in una collezione di rotatori e "oscillatori"; le frequenze dei rotatori sono chiamate frequenze proprie, mentre quelle degli oscillatori sono chiamate frequenze normali. Un toro di dimensione bassa si dice *ellittico*, *iperbolico* o *misto*, a seconda del segno delle frequenze normali (tutte positive, tutte negative o di segno misto, rispettivamente). Se almeno una frequenza normale è nulla, il toro si dice parabolico. Il problema dei tori di dimensione bassa è stato studiato per la prima volta da Melnikov [17], sebbene una dimostrazione completa è dovuta a Eliasson [6], che estende la teoria KAM al caso dei tori ellittici. Altri progressi sono stati fatti da Graff nel caso dei tori iperbolici [14] e da Pöschel nel caso dei tori ellittici [21] anche per un numero infinito di frequenze normali (si veda anche ad esempio [19, 15, 22]). In [7, 8, 12, 9, 10, 11, 13] si ottengono risultati dello stesso tipo ma utilizzando le tecniche del gruppo di rinormalizzazione.

In tutti i lavori citati sopra è sempre richiesta una qualche condizione di non degenerazione della perturbazione. Il primo risultato ottenuto senza ipotesi sulla perturbazione (a parte piccolezza e analiticità) è dovuto a Cheng [3] che dimostrò l'esistenza di tori invarianti di codimensione 1 sotto l'ipotesi di non degenerazione di Kolmogorov sull'Hamiltoniana libera.

Il caso parzialmente isocrono invece è stato considerato in [5] per una classe di sistemi speciale e in un caso più generale in [4]. In questi due lavori vengono usate le tecniche del gruppo di rinormalizzazione mentre Cheng utilizza l'approccio KAM classico.

[2]Un vettore $\omega \in \mathbb{Z}^n$ si dice Diofanteo se per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n_*$ si ha

$$|\omega \cdot \nu| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau}, \qquad \gamma, \tau > 0. \tag{2}$$

2 Risultati Principali e Schema della Dimostrazione

Consideriamo il sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \partial_I H(I, \varphi), \\ \dot{I} = -\partial_\varphi H(I, \varphi), \end{cases} \tag{1}$$

dove $H(I, \varphi)$ è una funzione reale analitica della forma

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + P(I, \varphi), \tag{2}$$

dove $(I, \varphi) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}^n$ sono le variabili azione-angolo, $\mathbb{D}$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e P una perturbazione Hamiltoniana della dell'Hamiltoniana libera H_0

Siamo interessati al caso in cui il vettore delle frequenze $\omega_0 := \partial_I H_0(I_0)$ soddisfa una relazione di risonanza semplice:

$$\omega_0 \cdot \nu_0 = 0$$

per qualche $\nu_0 \in \mathbb{Z}^n_*$, e $\omega_0 \cdot \nu \neq 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^n_*$ non parallelo a ν_0. Assumiamo che in un sistema di coordinate adatto alla risonanza, l'Hamiltoniana assume la forma

$$H(\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{A}, B) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{A} + h(B) + P(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B) \tag{3}$$

con $\partial_B h(B_0) = 0$ e ovviamente H è analitica per $(\boldsymbol{A}, B) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}$ e $(\boldsymbol{\alpha}, \beta) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{T}$. Le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}; && \dot{\boldsymbol{A}} = -\partial_{\boldsymbol{\alpha}} P(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B); \\ &\dot{\beta} = h'(B) + \partial_B P(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B); && \dot{B} = -\partial_\beta P(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B). \end{aligned} \tag{4}$$

Se la perturbazione è identicamente nulla il sistema (4), con dati iniziali $(\boldsymbol{\alpha}_0, \beta_0, \boldsymbol{A}_0, B_0)$, ammette soluzioni

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\alpha}_0; && \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0; \\ &\beta(t) = \beta_0; && B(t) = B_0. \end{aligned}$$

Ci domandiamo se esistono dei dati iniziali per cui la soluzione corrispondente persiste. Le ipotesi sull'Hamiltoniana libera sono le seguenti:

Ipotesi 1. Convessità*: $h(B)$ è una funzione convessa, i.e. si ha $h'' \geq \lambda > 0$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Ipotesi 2. Risonanza*: $h'(B_0) = 0$.*

Ipotesi 3. Condizione Diofantea relativa*: il vettore di frequenze* $\boldsymbol{\omega}$ *soddisfa*

$$|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}| \geq \frac{\gamma}{|\boldsymbol{\nu}|_1^{\tau}}, \qquad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_*^{n-1} \tag{5}$$

per qualche $\gamma > 0$ *e* $\tau > n-2$.

Si dimostra il seguente risultato.

Teorema 2.1. *Si consideri un Hamiltoniana* H *della forma (3), reale e analitica nell'intorno complesso*

$$\Sigma_{\rho,\xi} := \{|\mathrm{Im}\varphi| \leq \xi,\ |\mathrm{I}-\mathrm{I}_0| \leq \rho\}$$

di un n-torus $I_0 = (\boldsymbol{A}_0, B_0)$*, e si assumano le Ipotesi 1, 2 e 3.*

Allora esiste $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,\xi,\rho,\tau,\gamma,\lambda) > 0$ *tale che se* $|P| \leq \varepsilon_0$ *in* $\Sigma_{\rho,\xi}$*, il flusso indotto da* (3) *ammette almeno un toro di codimensione 1 della forma*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\psi}), \qquad & \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\psi}, \\ B &= B_0 + \Gamma(\boldsymbol{\psi}), \qquad & \beta &= \beta_0 + \Theta(\boldsymbol{\psi}) \end{aligned} \tag{6}$$

con $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}) \in \mathbb{T}^{n-1}$ *e dove* $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} = (\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{n-1})$*,* Γ*,* Θ *sono funzioni reali e analitiche* 2π*-periodiche nel dominio complesso* $|\mathrm{Im}\boldsymbol{\psi}| \leq \xi/2$*. Il flusso su* $\mathbb{T}^{n-1}$ *è dato da*

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\omega} t. \tag{7}$$

Inoltre, per ogni $\delta > 0$*, esiste* $\varepsilon' = \varepsilon'(\delta,n,\xi,\rho,\tau,\gamma,\lambda) < \varepsilon$ *positivo tale che se* $|P| \leq \varepsilon'$ *in* $\Sigma_{\rho,\xi}$*, le funzioni* $\boldsymbol{\Gamma} := (\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}, \Gamma)$ *e* Θ *soddisfano*

$$|\boldsymbol{\Gamma}| + |\Theta| < \delta. \tag{8}$$

La dimostrazione è basata sul metodo KAM che impiega uno schema iterativo rapidamente convergente. A causa della risonanza del vettore ω_0 e ancor più per la possibile degenerazione della perturbazione, non possiamo semplicemente stringere i domini come nel KAM classico. Formalmente, ad ogni passo iterativo introdurremo un cambiamento di coordinate simplettico della forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}_+ + \partial_{\boldsymbol{\alpha}} W, \qquad & \boldsymbol{\alpha}_+ &= \boldsymbol{\alpha}, \\ B &= B_+ + \partial_\beta W, \qquad & \beta_+ &= \beta + \partial_{B_+} W \end{aligned}$$

con funzione generatrice $W(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B_+)$.

Al primo passo W è determinata risolvendo l'equazione omologica

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\partial_{\boldsymbol{\alpha}} W + P(\boldsymbol{\alpha},\beta,B_+) = \widetilde{N}(\beta, B_+). \tag{9}$$

Possiamo scegliere $\widetilde{N}(\beta, B_+) = P_0(\beta, B_+)$ cosicché nello spazio di Fourier la (9) diventa

$$(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})W_{\boldsymbol{\nu}}(\beta, B_+) = -P_{\boldsymbol{\nu}}(\beta, B_+), \qquad \boldsymbol{\nu} \neq 0,$$

e quindi

$$W(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B_+) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{i}P_{\boldsymbol{\nu}}(\beta, B_+)}{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}}.$$

Il cambiamento di coordinate è ben definito e, nelle nuove variabili, l'Hamiltoniana assume la forma, con abuso di notazione,

$$H(\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{A}, B) = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A} + h(B) + N_+(\beta, B) + P_+(\boldsymbol{\alpha}, \beta, B). \tag{10}$$

Un'osservazione importante è che la "parte principale" dipende anche dalla variabile angolare β. In ogni caso è possibile (grazie al Teorema della Funzione Implicita) determinare B in funzione di β tale che

$$h'(B) + \partial_B N_+(\beta, B) = 0. \tag{11}$$

Con questa scelta, se fosse possibile trovare β^* tale $\partial_\beta(h(B(\beta)) + N_+(\beta, B(\beta))) = 0$, il flusso governato dall'Hamiltoniana $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A} + h(B) + N_+(\beta, B)$ ammetterebbe un toro invariante con frequenza $\boldsymbol{\omega}$ a patto di scegliere come dato iniziale il punto $(\beta^*, B(\beta^*))$. Chiaramente questo è possibile dato che la funzione $\phi(\beta) := h(B(\beta)) + N_+(\beta, B(\beta))$ è definita su $\mathbb{T}$, e quindi ammette massimo e minimo. L'idea sarebbe quindi ripetere questo ragionamento ai passi successivi. Il problema è che, definendo la funzione $\phi_+(\beta) := h(B_+(\beta)) + N_+(\beta, B_+(\beta)) + N_{++}(\beta, B_+(\beta))$, dove ovviamente $B_+(\beta)$ è tale che

$$\big(h'(B) + \partial_B(N_+(\beta, B) + N_{++}(\beta, B))\big)_{B=B_+(\beta)} = 0,$$

il punto critico β_+^* di ϕ_+ potrebbe essere "lontano" da β_*.

Definizione 2.2. Persistenza Debole/Forte. *Sia $F(\beta, B) = h(B) + N_p(\beta, B)$ la parte principale dell'Hamiltoniana al p-esimo passo. Se $(\beta^*, B(\beta^*))$ è il punto critico di F diremo che esso ha* Persistenza Debole *se vale la relazione*

$$\left|\left(\partial_\beta^2 N_p - \left(h'' + \partial_B^2 N_p\right)^{-1}(\partial_\beta\partial_B N_p)^2\right)_{B=B^*,\beta=\beta^*}\right| \leq \varepsilon_0^{\sigma_p} \tag{12}$$

dove σ_p è una costante che dipende dal passo. Se $(\beta^*, B(\beta^*))$ non soddisfa la (12), diremo che esso ha Persistenza Forte.

Si noti che la definizione sopra dipende dal passo cui siamo arrivati e quindi bisognerà controllare ogni volta il tipo di persistenza del punto critico. Chiaramente al primo passo si è nel caso di Persistenza Debole dato che l'Hamiltoniana libera non dipende dalla variabile β.

Si vede che nel caso di Persistenza Debole la funzione ϕ è molto piatta e quindi possiamo usare questa proprietà per far si che β_+^* sia dominio di definizione del cambio di variabili. Al contrario nel caso di Persistenza Forte β_+^* è molto vicino a β^* e quindi, poichè se a un certo passo si è nel caso di Persistenza Forte questa si preserverà nei passi successivi, è possibile scegliere esplicitamente i domini. Più precisamente, si dimostra che è possibile trovare induttivamente una sequenza di cambi di coordinate $\mathscr{M}_p : \mathcal{S}_p \to \mathcal{S}_{p-1}$ tali che nel dominio $\mathcal{S}_p$ l'Hamiltoniana assume la forma

$$H_p(\boldsymbol{\alpha}_p, \beta_p, \boldsymbol{A}_p, B_p) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{A}_p + h(B_p) + N_p(\beta_p, B_p) + P_p(\boldsymbol{\alpha}_p, \beta_p, B_p), \tag{13}$$

con $h(B_p) + N_p(\beta_p, B_p)$ convessa in B_p per ogni β_p fissato dove abbiamo posto $N_0(\beta_0, B_0) \equiv 0$. Poiché il cambio di coordinate dipende dal tipo di persistenza del punto critico, il dominio $\mathcal{S}_p$ andrà scelto della forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p =& \mathbb{R}^{n-1} \times \{|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}_p)| \le \xi_p, \\ & |B_p - B_p(\beta_p)| \le \rho_p^3, |\mathrm{Im}(\beta_p)| \le \rho_p^2, \mathrm{Re}(\beta_p) \in L_p\}, \end{aligned} \tag{14}$$

nel caso di Persistenza Debole, e

$$\mathcal{S}_p =\mathbb{R}^{n-1} \times \left\{|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}_p)| \le \xi_p, \ |B_p - B_p^*| \le \rho_p^3, |\beta_p - \beta_p^*| \le \rho_p^3\right\}, \tag{15}$$

nel caso di Persistenza Forte, dove $L_p = \mathbb{T}$ o $L_p = [l_p, r_p] \supset [\beta_p^* - \rho_p^2, \beta_p^* + \rho_p^2]$, e dove si è posto

$$\xi_p = \frac{\xi_0}{2}\left(1 + \frac{1}{2^p}\right), \tag{16a}$$

$$\rho_p = \rho_{p-1}^{\frac{14}{13}}, \ \rho_0 \le \xi_0 \tag{16b}$$

$$\varepsilon_p = \rho_p^{13}. \tag{16c}$$

Si dimostra che valgono le seguenti proprietà:

- La piccolezza, dopo ogni step di iterazione, della variazione della parte principale dell'Hamiltoniana nel dominio $\mathcal{S}_{p+1}$:

$$|N_p(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}, \beta_{p+1}, \boldsymbol{A}_{p+1}, B_{p+1}) - N_{p+1}(\boldsymbol{\alpha}_{p+1}, \beta_{p+1}, \boldsymbol{A}_{p+1}, B_{p+1})| \le 2\varepsilon_p; \tag{17}$$

- La piccolezza della perturbazione e delle sue derivate in $\mathcal{S}_p$:

$$\begin{aligned}
&|P_p| \le \varepsilon_p, \\
&\max\left\{|\partial_{\boldsymbol{\alpha}_p} P_p|, |\partial_{\beta_p} P_p|, |\partial_{B_p} P_p|\right\} \le \varepsilon_p^{\frac{9}{13}}, \\
&\max\left\{|\partial^2_{\boldsymbol{\alpha}_p} P_p|, |\partial_{\boldsymbol{\alpha}_p}\partial_{\beta_p} P_p|, |\partial^2_{\beta_p} P_p|, |\partial^2_{B_p} P_p|, |\partial_{\boldsymbol{\alpha}_p}\partial_{B_p} P_p|, |\partial_{\beta_p}\partial_{B_p} P_p|\right\} \le 2\varepsilon_p^{\frac{5}{13}}, \\
&\max_{|i+j|=3}\left\{|\partial^i_{\beta_p}\partial^j_{B_p} P_p|, |\partial^i_{\boldsymbol{\alpha}_p}\partial^j_{B_p} P_p|\right\} \le 6\varepsilon_p^{\frac{1}{13}},
\end{aligned} \tag{18}$$

- Le stime in $\mathcal{S}_p$:

$$|\mathscr{M}_p - id| \le \varepsilon_p^{\frac{7}{13}}, \tag{19}$$

  e

$$|\mathscr{M}'_p - \mathbb{1}| \le \varepsilon_p^{\frac{3}{13}}, \tag{20}$$

  dove abbiamo denotato con $\mathscr{M}'_p$ la matrice Jacobiana di $\mathscr{M}_p$.

Da queste proprietà segue che è possibile costruire induttivamente una sequenza di trasformazioni simplettiche $\mathscr{M}_p$ se ε_0 è sufficientemente piccolo. Per $p \to \infty$ si ottiene un dominio $\mathcal{S}_\infty$ tale che

$$\mathcal{S}_\infty \supseteq \left\{|\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha})| \le \frac{\xi_0}{2}\right\} \times \{\beta = \beta^*_\infty, \boldsymbol{A}_\infty = \boldsymbol{A}^*_0, B_\infty = B_\infty(\beta^*_\infty)\},$$

mentre la trasformazione $\mathscr{T}_p := \mathscr{M}_1 \circ \ldots \circ \mathscr{M}_p : \mathcal{S}_p \to \mathcal{S}_0$ converge uniformemente a un'immersione $\mathscr{T}_\infty : \mathcal{S}_\infty \to \mathcal{S}_0$, e inoltre

$$\mathscr{T}_\infty(\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\omega} t, \beta^*_\infty, \boldsymbol{A}^*_0, B_\infty(\beta^*_\infty)) = \Phi^t_0(\mathscr{T}_\infty(\boldsymbol{\alpha}_0, \beta^*_\infty, \boldsymbol{A}^*_0, B^*_\infty)), \tag{21}$$

dove Φ^t_0 è il flusso indotto dall'Hamiltoniana $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{A}_0 + h(B_0) + P(\boldsymbol{\alpha}_0, \beta_0, B_0)$. Questo significa che si è trovato almeno un toro invariante per tale Hamiltoniana.

Riferimenti bibliografici

[1] V. I. Arnol′d, *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 5 (113), 13–40.

[2] ———, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978, Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, Graduate Texts in Mathematics, 60.

[3] Ch.-Q. Cheng, *Birkhoff-Kolmogorov-Arnold-Moser tori in convex Hamiltonian systems*, Comm. Math. Phys. **177** (1996), no. 3, 529–559.

[4] L. Corsi and G. Gentile, *Resonant motions in the presence of degeneracies for quasi-periodically perturbed systems*, preprint, Roma (2012).

[5] ———, *Oscillator synchronisation under arbitrary quasi-periodic forcing*, Comm. Math. Phys. (to appear).

[6] L. H. Eliasson, *Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **15** (1988), no. 1, 115–147 (1989).

[7] G. Gallavotti and G. Gentile, *Hyperbolic low-dimensional invariant tori and summations of divergent series*, Comm. Math. Phys. **227** (2002), no. 3, 421–460.

[8] G. Gallavotti, G. Gentile, and A. Giuliani, *Fractional Lindstedt series*, J. Math. Phys. **47** (2006), no. 1, 012702, 33.

[9] G. Gentile, *Quasi-periodic solutions for two-level systems*, Comm. Math. Phys. **242** (2003), no. 1-2, 221–250.

[10] ———, *Resummation of perturbation series and reducibility for Bryuno skew-product flows*, J. Stat. Phys. **125** (2006), no. 2, 321–361.

[11] ———, *Degenerate lower-dimensional tori under the Bryuno condition*, Ergodic Theory Dynam. Systems **27** (2007), no. 2, 427–457.

[12] ———, *Quasiperiodic motions in dynamical systems: review of a renormalization group approach*, J. Math. Phys. **51** (2010), no. 1, 015207, 34.

[13] G. Gentile and G. Gallavotti, *Degenerate elliptic resonances*, Comm. Math. Phys. **257** (2005), no. 2, 319–362.

[14] S. M. Graff, *On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems*, J. Differential Equations **15** (1974), 1–69.

[15] D. Huang and Z. Liu, *On the persistence of lower-dimensional invariant hyperbolic tori for smooth Hamiltonian systems*, Nonlinearity **13** (2000), no. 1, 189–202.

[16] A. N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **98** (1954), 527–530.

[17] V. K. Mel′nikov, *On the stability of a center for time-periodic perturbations*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **12** (1963), 3–52.

[18] J. Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **1962** (1962), 1–20.

[19] ———, *Convergent series expansions for quasi-periodic motions*, Math. Ann. **169** (1967), 136–176.

[20] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987, Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. [Periodic solutions. Nonexistence of uniform integrals. Asymptotic solutions], Reprint of the 1892 original, With a foreword by J. Kovalevsky, Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard. [Albert Blanchard Scientific Library].

[21] J. Pöschel, *On elliptic lower-dimensional tori in Hamiltonian systems*, Math. Z. **202** (1989), no. 4, 559–608.

[22] D. Treschev, *Evolution of slow variables in a priori unstable Hamiltonian systems*, Nonlinearity **17** (2004), no. 5, 1803–1841.